

O tym, jak matematyka robi z mądrych ludzi głupków

Autor: **Ben O'Neill**

Źródło: mises.org

Tłumaczenie: **Anna Sroka**

Matematyka potrafi czasem zrobić głupków z mądrych ludzi. Pozwólcie, że wytłumaczę, co przez to rozumiem. Nie mam na myśli, że bycie kiepskim z matematyki świadczy o czyjeś głupocie. Koniec końców, matematyka to dyscyplina bardzo abstrakcyjna i trudna, której poświęcić trzeba lata, ba, dziesiątki lat nauki. Poza tym, istnieje całkiem spora liczba mądrych ludzi, którzy odznaczają się nikłym rozumieniem matematyki i równie nikłą umiejętnością posługiwania się nią w praktyce. Chcę raczej powiedzieć, że matematyka dosyć często wprowadza ludzi w



błąd i skłania ich do zaakceptowania przesłanek tak bezsensownych, że tylko przyodzianie ich w matematyczny kubraczek powstrzymuje prześmiewcze ataki ze strony tych, którym nie udało się zaliczyć testów z podstaw algebry na poziomie licealnym.

Niebezpieczeństwo rozumowania *stricte* matematycznego tkwi w tym, że może ono czasem zachęcać do podążania za absurdalnym tokiem myślowym i niezdawania sobie z tego sprawy. Dzieje się tak, bo w gąszczu równań matematycznych często traci się zdrowy rozsądek. Jako nauczyciel statystyki muszę stale pilnować, żeby moi studenci nie wpadali w tę pułapkę¹. Jedną z

¹ Staram się uczulać moich studentów na ten problem, od czasu do czasu pokazując im argument statystyczny, którego wnioski są w oczywisty sposób absurdalne. Najczęściej zadają pytania statystyczne, które prowokują studentów do mylenia korelacji z relacją

podstawowych trudności w nauczaniu matematyki stosowanej jest fakt, że studenci często dają się nabrać przez aparat matematyczny, którym operują. Nie potrafią zrozumieć natury problemu, który został opisany w języku matematyki.

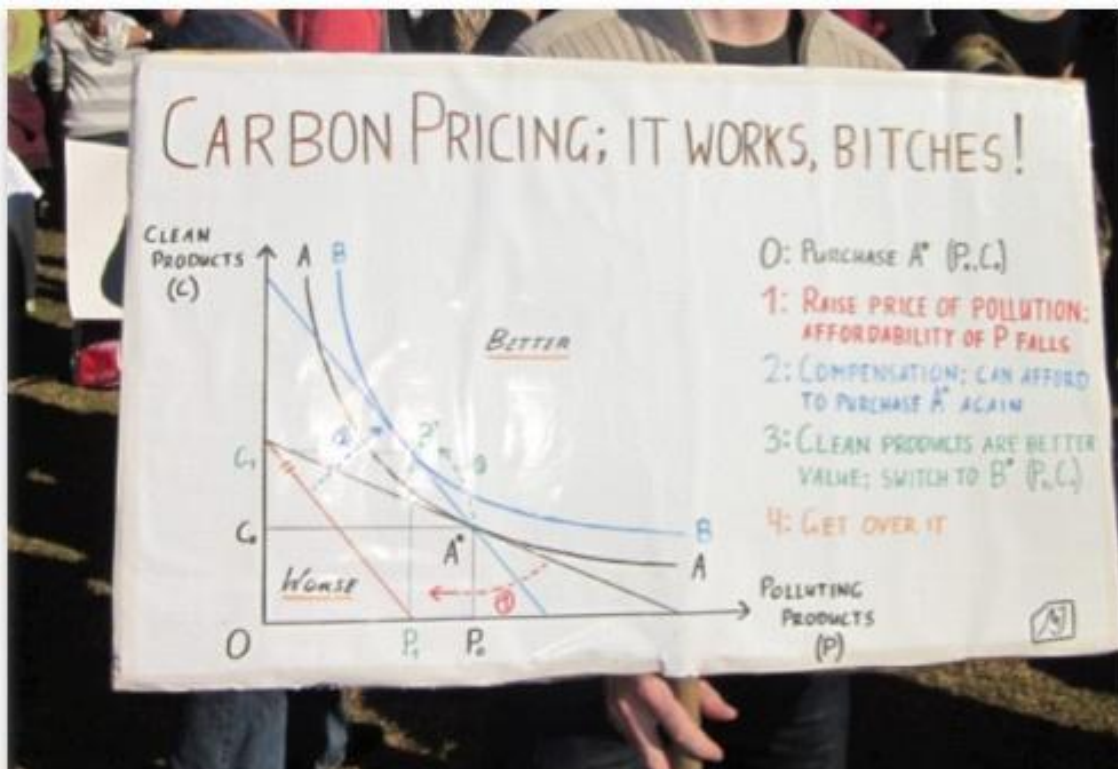
Jednym z częściej popełnianych błędów podczas posługiwania się matematyką, jest brak reakcji na sytuację, w której nasze rozumowanie prowadzi do [zbyt odważnych wniosków](#). Do tej pomyłki dochodzi, gdy dany argument można zastosować również w bardziej ogólnych sytuacjach, w których jednak wnioski okazują się w oczywisty sposób absurdalne². Chociaż ten mechanizm może wystąpić nie tylko w rozumowaniu matematycznym, to jednak właśnie matematyka stosowana, do zrozumienia której potrzeba intensywnego wysiłku umysłowego i przebycia wymagającej ścieżki edukacyjnej, jest dla niego podatnym środowiskiem. Nie jest trudno zgubić się wśród równań i twierdzeń i nie widzieć lasu, lecz tylko pojedyncze drzewa.

Przykład

Pozwolę sobie zilustrować opisany fenomen konkretnym przykładem. Niedawno rząd australijski ogłosił, że podejmie próbę wprowadzenia w życie rozporządzenia nakładającego podatek na przemysłową emisję dwutlenku węgla. Część dochodu z owego podatku ma być przeznaczona na wypłacanie odszkodowań klientom, którzy będą musieli płacić wyższe ceny. Na manifestacji prorządowej w Sydney pewien młody aktywista z dumą prezentował wykres obrazujący, jego zdaniem niepodważalny, argument popierający rządowy plan.

przyczynowo-skutkową, i prowadzą do jakichś absurdalnych wniosków. Sprawdzam przy tym, czy zauważają oni tę absurdalność, czy raczej ślepo brną przez równania.

² Przed podążaniem za tego typu rozumowaniem przestrzega łacińska sentencja: *quod nimis probat, nihil probat* („co udowadnia zbyt wiele, niczego nie udowadnia”).



Zdjęcie pochodzi z manifestacji popierających nałożenie podatku na emisję CO₂³

Czytelnikom nieobeznanym w [ekonomii neoklasycznej](#) ten wykres może wydawać się niczym więcej jak bełkotem. Ale tym, którzy trochę o niej wiedzą, wykres wydaje się znajomy. Przedstawia on tzw. analizę użyteczności, rzekomo obrazującą, w jaki sposób nałożenie podatku na produkt wywołujący zanieczyszczenie środowiska (czyli *de facto* podniesienie ceny produktu), przy jednoczesnym wypłacaniu odszkodowań konsumentom, przyczyni się do wzbogacenia tych ostatnich. Krócej: analiza ta ma pokazać, jak plan rządu Australii uczyni ludzi bogatszymi.

To klasyczny przykład rozumowania matematycznego, które udowadnia zbyt wiele. Na wykresie, jeden z produktów oznaczony jest literą „C” — czyste produkty, a drugi „P” — produkty zanieczyszczające. Chociaż takie są oznaczenia, to fakt, że pozioma oś przedstawia zużycie produktów

³ Zdjęcie pochodzi ze strony <http://twitpic.com/57awlj>. Celowo usunąłem z kadru twarz młodego mężczyzny, gdyż nie mam zamiaru go ośmieszać. Krytyka jego transparentu ma na celu ukazanie ogólnego problemu związanego z dowodzeniem matematycznym, chociaż zdecydowanie zasługuje on na krytykę — przede wszystkim ze względu na nieprzyzwoity i pretensjonalny charakter transparentu.

zanieczyszczających nie ma absolutnie żadnego znaczenia. Na wykresie żadna linia nie przedstawia stopnia zanieczyszczenia powodowanego przez produkty „P”, przez co oznakowanie nie pełni żadnej roli poza graficzną. „P” staje się symbolem i może równie dobrze przedstawiać piłki, pączki, pomadki, pampersy, polerowanie, prasowanie, czy inny dowolny towar lub usługę (w tym te, których nazwa nie zaczyna się na „p”).

Używając tego samego argumentu, wykres w jasny sposób może przekonać nas, że rząd wpłynie na wzbogacenie się ludzi, nakładając podatek na dowolny produkt, a następnie wypłacając odszkodowania konsumentom. Chociaż na tym wykresie pokazane jest, że rząd opodatkowuje produkty zanieczyszczające, jego twórca mógł równie dobrze zamienić osiami produkty zanieczyszczające i czyste — z takim samym rezultatem w postaci wzbogacenia się konsumentów.

Analiza przedstawiona na tym wykresie mogłaby być poprowadzona dalej — w końcu można opodatkować coś jeszcze. Na podstawie tej samej analizy, rząd mógłby jeszcze bardziej podnieść zadowolenie Australijczyków, stosując plan opodatkowywania i wynagradzania najpierw wobec produktów zanieczyszczających, a potem czystych. Dlaczego jednak zatrzymać się na tym? Można nakładać podatek najpierw na zanieczyszczające, potem na czyste, znów na zanieczyszczające, itd. Za każdym razem analiza wskazywałaby na bogacenie się konsumentów. Proces ten mógłby być powtarzany *ad infinitum*, pozwalając rządowi na całkowite pozbycie się problemu rzadkości poprzez nieograniczone powiększanie możliwości konsumpcyjnych konsumenta. Czy to nie brzmi wspaniale⁴?

Ale chwileczkę. Nie trzeba być matematykiem ani ekonomistą, żeby zorientować się, że w tym rozumowaniu jest coś odrobinę dziwnego. Błąd tkwi

⁴ Zakładając, że funkcja użyteczności jest funkcją quasi-wklęsłą (założenie to jest typowe dla mikroekonomii neoklasycznej), powtarzanie schematu z wykresu w nieskończoność doprowadziłoby nas do szeregu o wyrazach ściśle dodatnich, obrazujących zmiany w użyteczności. Pewne dalsze założenia na temat użyteczności byłyby potrzebne, aby zapewnić zbieżność tego szeregu do nieskończoności — tak, aby użyteczność (a jednocześnie ograniczenia budżetowe i możliwości konsumpcji) mogła być zwiększana bez ograniczeń. Jednokładna funkcja użyteczności jest tu wystarczającym, ale niekoniecznym warunkiem.

albo w którymś z kroków analizy, albo w którymś ze wstępnych założeń. Za moment wyjaśnię, gdzie ukryty jest błąd — będzie to zadanie czysto akademickie. Sęk tkwi we wniosku z analizy: jest on tak absurdalny, że fakt istnienia błędu w analizie nie ulega wątpliwości, nawet jeśli nie umiemy dokładnie go wskazać. Ta analiza udowadnia zbyt wiele.

Założmy, że młody dżentelmen, który opracował wykres, pominął matematyczne wyjaśnienia swojego rozumowania i przedstawił je opisowo: „Jeśli istnieją dwa rodzaje dóbr — nazwijmy je „dobra C” i „dobra P”, i rząd postanawia opodatkować jedno z nich (np. „dobro P”), a następnie wypłacać korzystającym z tego dobra konsumentom odszkodowanie, to ci konsumenci staną się bogatsi niż przed rozpoczęciem tego procesu”. W głowie słuchaczy automatycznie powinno zrodzić się pytanie: Jak wysokie musi być odszkodowanie, żeby tak faktycznie się stało? I czy dochód z podatku będzie wystarczający na pokrycie odszkodowań? Czy nie są to ważne kwestie mogące rozstrzygnąć, czy przedstawiony argument jest wystarczającym powodem do poparcia podatku? Słowem: te pytania okazać się mogą wyzwaniem dla analizującego, a jednocześnie szansą na wykrycie poważnej usterki tkwiącej w jego założeniach.

Błąd wykryty!

Powyższe pytania są kluczem do odnalezienia błędu w analizie. Proszę zauważyć, że, według drugiego kroku opisanego obok wykresu, konsument dostaje wynagrodzenie, które daje mu możliwość zakupu takiego samego zestawu dóbr, jakie posiadał na początku. Ponieważ wzrosła cena produktów zanieczyszczających „P”, koszt odszkodowania jest równy wysokości pierwotnego zużycia produktów zanieczyszczających pomnożonej przez wartość podwyżki ceny spowodowanej opodatkowaniem (przedstawiając to w formie równania, otrzymujemy: $t \times P_0$, gdzie $0 < t < 1$ oznacza podwyżkę ceny spowodowaną podatkiem).

Rodzi się pytanie: czy rząd może pozwolić sobie na takie działanie, korzystając z dochodu otrzymanego pośrednio od tych samych konsumentów? Spróbujmy odpowiedzieć na to pytanie z najbardziej życzliwego z możliwych punktów widzenia, akceptując, dla dobra rządu, nawet najbardziej fikcyjne założenia. Przyjmijmy, wbrew zdrowemu rozsądkowi, że plan opodatkowania i wynagradzania może być wdrożony i przeprowadzony bez ponoszenia

jakichkolwiek kosztów. W tym wypadku, dochód netto odprowadzany od konsumentów byłby równy wpływom brutto, których wartość jest równa ilości zużycia produktów zanieczyszczających po wprowadzeniu podatku pomnożonej przez wartość podwyżki ceny ($t \times P_1$, gdzie $0 < t < 1$ oznacza podwyżkę ceny spowodowaną podatkiem.)

Widzicie, w czym tkwi problem? Do obliczenia dochodu brutto pobieranego od konsumentów stosuje się poziom zużycia po opodatkowaniu, ale wysokość odszkodowania obliczana jest na podstawie prognozowanego zużycia produktów zanieczyszczających jeszcze przed nałożeniem na nie podatku. Skoro analiza pokazuje, że konsument zużywa mniej produktów zanieczyszczających po nałożeniu podatku niż przed nim, zysk pobierany od konsumentów nie może starczyć na pokrycie odszkodowań (skoro $P_0 > P_1$, to $t \times P_0 > t \times P_1$).

Stosując ten sam wzór matematyczny, który przedstawiony jest na transparencie, można wykazać, że wartość potrzebna do zrekompensowania konsumentowi podwyżki ceny (zwanej zmianą kompensacyjną) celem uczynienia go chociaż równie bogatym, co przed podwyżką, jest większa od dochodu brutto uzyskanego z podwyżki cen⁵. Oznacza to, że stosując taki plan opodatkowania, nie da się uniknąć strat w „użyteczności”, pomijając nawet koszty administracyjne wymagane do wprowadzenia go w życie i fakt przeznaczenia całości dochodu brutto z podwyżki na odszkodowanie. Jedyne sensowny argument wypływający z takiego toku myślowego to ten, że wypłacanie konsumentom większej ilości pieniędzy niż ponoszone przez nich koszty, przy jednoczesnym obciążeniu kosztami innych podmiotów (np. producentów), dawałoby potencjalne szanse na ich wzbogacenie. Jednak nawet w takim

⁵ Twierdzenie to zademonstrowane jest przy użyciu standardowej neoklasycznej analizy użyteczności (podobnie jak na wykresie) w publikacji pt. *Microeconomic Theory*, autorstwa Mas-Colell, A., Whinston, M.D. and Green, J.R. (Przykład 3.I.1, str. 84-85, Oxford University Press: New York, 1995). Podobną dyskusję przedstawiają Jehle, G.A. and Reny, P.J. w *Advanced Microeconomic Theory (2nd Edition)*. Addison-Wesley Longman: Boston. 2001. str. 53, 166–171. Taka analiza posługuje się standardowymi dla mikroekonomii neoklasycznej założeniami: relacja preferencji konsumentów jest zupełna, przechodnia, ciągła, ściśle monotoniczna i ściśle wypukła (dwa ostatnie warunki zapewniają utratę dochodów przez rząd, a nieco mniej ostre w dalszym ciągu przynoszą słabe straty).

wypadku, przy szczerze przeprowadzonej analizie ekonomicznej, należałoby wziąć pod uwagę koszty innych podmiotów.

Sytuacja, rzecz jasna, staje się dużo gorsza, jeśli przyjmiemy realistyczne założenia dotyczące kosztów zarządzania planem, które ograniczą kwotę netto przeznaczoną na wypłacenie odszkodowań. W rzeczywistości, na utworzenie i zarządzanie takim planem opodatkowania rząd musiałby przeznaczyć bardzo duże ilości pieniędzy, a dodatkowo podatników należałoby obciążyć kosztami wywiązania się z obowiązków. Sytuacja konsumenta pogarsza się, rzecz jasna, jeśli otrzymuje on w ramach odszkodowania tylko część dochodu z opodatkowania. Ponadto, poszczególni konsumenci otrzymywaliby odszkodowania w różnych wysokościach, tak więc pomimo wypłacania niektórym dużych odszkodowań, inni mieliby mniej pieniędzy niż przedtem. Możliwość [pogoni za rentą](#) i inne problemy ekonomiczne mogłyby dodatkowo pogorszyć sytuację, aż obraz proponowanego planu przybrałby dosyć nieciekawych wygląd.

Według wykresu ze zdjęcia, wysokość odszkodowania potrzebna do osiągnięcia zaznaczonej na niebiesko krzywej obojętności (miejsca, od którego konsument bogaci się), musiałaby wynosić więcej niż dochód brutto z podatku. Nawet na dojście do krzywej obojętności zaznaczonej na czarno (miejsca, w którym konsument wraca do poziomu bogactwa sprzed nałożenia podatku) potrzeba by sumy większej niż dochód brutto. Doliczając do tego koszty zarządzania i inne bardzo realistyczne czynniki, otrzymujemy pokaźną sumę pieniędzy, której nie sposób nigdzie znaleźć.

Bez względu na wnioski z tego typu analizy użyteczności, istnieje jeden fundamentalny argument ekonomiczny przeciw planom podobnym do proponowanego. Jeżeli możliwe byłoby podnoszenie zadowolenia konsumentów poprzez zabieranie od nich pieniędzy i oddawanie ich w sposób nieszkodzący dochodom, prawdopodobnie konsumenci mogliby wdrażać go samodzielnie, dobrowolnie zawierając umowy bez elementu przymusowego. Fakt, że tego nie robią i trzeba użyć przymusu, aby nakłonić ich do porozumienia, pokazuje — na mocy zasady ujawnionych preferencji — że takie porozumienie nie poprawia ich dobrobytu — niezależnie od domniemanego obrazu wyłaniającego się z modeli ekonomicznych.

Jak uzasadnić nawet najgłupszy pomysł?

Chociaż nie jestem jednym z nich, nie sądzę, że zwolennicy opodatkowania emisji CO₂ byliby zadowoleni z powyższego absurdalnego rozumowania, przedstawionego w wersji werbalnej. Jednak wystarczy przybrać go w garść matematycznych ozdobników i *voilà* — otrzymujemy transparent nazwany przez pewnego życzliwego obserwatora „najlepszym transparentem”⁶ na całej demonstracji. W gruncie rzeczy, analiza przedstawiona na wykresie jest nie tylko błędna. To samo rozumowanie przeprowadzone we właściwy sposób prowadzi do wniosków wręcz przeciwnych, pokazując, że plan opodatkowania i odszkodowania uczyni konsumenta biedniejszym, o ile nie dostanie on dodatkowych pieniędzy spadających jak manna z nieba.

Nie licząc opisanego wyżej przypadku, gdzie argument ten jest zaprezentowany w formie matematycznej, nie przypominam sobie ani jednego zwolennika nałożenia podatku na emisję dwutlenku węgla zgadzającego się z idiotycznym poglądem, jakoby plan opodatkowania i odszkodowań zwiększał zadowolenie konsumentów bez względu na to, jakie dobro ulega opodatkowaniu. Ci ludzie nie są takimi głupcami. Prawie wszystkie argumenty za podobnym planem opierają się na innym toku myślowym. Wykorzystują one zazwyczaj pojęcie [negatywnych efektów zewnętrznych](#), które biorą pod uwagę faktycznie istniejący problem zanieczyszczenia. Argumentów tych nie da się przedstawić w formie wykresu użyteczności pojedynczego konsumenta, gdyż zakładają one istnienie interakcji pomiędzy działaniami jednego konsumenta a wyborami innego. Argument matematyczny przedstawiony na wykresie nie jest więc postępowaniem stanowiska propodakowego. Wyrządza on właściwie szkodę temu stanowisku, ukazując jego nieprawdziwe i źle rozpatrzone uzasadnienie.

To wszystko pokazuje konkretne zagrożenie płynące z omamiania przez matematyczną otoczkę, włącznie z absurdalnymi przesłankami, które przemykają niezauważone. Matematyczne rozumowanie pozwala na postawienie możliwie najgłępszego argumentu dla danego przedsięwzięcia przy zachowaniu pozorów pewności, a nawet zarozumiałości co do swojej racji.

Podejmując się stosowania matematyki do analizy problemu ekonomicznego, należy wystrzegać się tej pułapki. Mimo, iż matematyka to specjalistyczna dziedzina, znajdująca się poza zasięgiem wielu ludzi, wywód

⁶ Wg podpisu pod zdjęciem <http://twitpic.com/57awlj>.

matematyczny powinien dać się przetłumaczyć na zrozumiały argument słowny, przynajmniej heurystyczny. Argumenty matematyczne wynikają z przesłanek bazujących na logice, wobec tego, jeżeli ktoś nie jest w stanie wytłumaczyć struktury argumentu ani jego założeń ludziom nieobeznanym w matematyce, to najprawdopodobniej dana osoba nie posiada wystarczającego rozumienia struktury argumentu, aby zagwarantować jego niezawodność.

Cel i wartość podejścia matematycznego

Moje rozważania nie mają na celu jedynie przedstawienia niebezpieczeństwa publicznego głoszenia przez niezdarnych studentów ekonomii ich równie niezdarnych analiz. Ukazywać one mają szerszy problem związany z użyciem i nadużyciem argumentów matematycznych. Matematyka nie rozwiąże za nas problemów naukowych — może ona jedynie pomóc nam przedstawić pewne kwestie w ilościowy sposób i odnaleźć logiczne skutki założeń odnośnie do problemów, które chcemy rozwiązać. Wywód matematyczny pokazuje, że pewne przesłanki prowadzą w logiczny sposób do określonych wniosków. Nie gwarantuje on jednak, że przesłanki te mają jakiegokolwiek odzwierciedlenie w rzeczywistości. Czy tak jest, czy nie, to dosyć istotny problem, któremu poświęcić trzeba najwięcej uwagi.

Matematyka ma na celu uzupełnianie argumentów logicznych poprzez zapewnianie możliwości jasnego zdefiniowania problemu i zapewnienia, że wzięto pod uwagę wszystkie konieczne założenia. Przewaga dobrze użytej matematyki nad argumentami słownymi polega na pewności przeprowadzającego analizę o tym, że jest świadom wszystkich rzeczy, które zakłada i nie dokonuje w argumentacji nielogicznych przeskoków. Jednak, jeśli argumenty matematyczne używane są do usuwania jakiegoś faktu w cień, a nie jego rozwiązania, mogą one *zatajać* pewne wnioski.

Argument przedstawiony na transparencie z początku artykułu zasadza się na ukryciu wartości dochodu potrzebnego na wypłacenie odszkodowań. Brak w nim porównania tej kwoty z faktyczną kwotą zabieraną podatnikom z powodu podwyżki. Kiedy w końcu weźmiemy pod uwagę tę różnicę, jasne staje się, że wykres jest wadliwy lub przynajmniej bardzo mylący. Nie ma on właściwie na celu wyjaśnienia problemu, ale jego ukrycie. Dalszym celem jest zapobieganie racjonalnej dyskusji na ten temat poprzez zniechęcenie każdego, kto nie

studiował ekonomii matematycznej i, tym samym, nie ma możliwości odczytania znaczeń poszczególnych krzywych wykresu. Podobnie jak wiele domniemyanych uzasadnień rządowych działań i interwencji, argument z wykresu nie musi być zbyt logiczny, o ile tylko jest na tyle tajemniczy, żeby powstrzymać niewykształconą większość od jego zrozumienia.

Taki argument to przykład [argumentum ad verecundiam](#), gdzie autorytetem jest w tym przypadku kilka kolorowych kresek. Tak, jak wiele rzekomych uzasadnień stosowania siły przez rząd, argument ten bazuje na fałszywych przesłankach lub kiepskiej logice, przebranych za analizę naukową z prawdziwego zdarzenia. Jest on głosem pretensjonalnej elity zwracającej się do społeczeństwa: „Nie ma sposobu, byście zrozumieli to, co chcemy wam wytłumaczyć, więc, dziwki, *musicie* zdać się na nasz nadrzędny intelekt!” (nb. matematyka może czasem zrobić z całkiem mądrych ludzi głupków, ale nie może zrobić z nich pretensjonalnych przeciętniaków — oni sami się takimi czynią).

Powodem, dla którego argumenty matematyczne udowadniają czasem za dużo, jest przyjęcie złych założeń. Jeżeli argument matematyczny prowadzi do wniosku niezgadającego się z intuicją albo może być przeprowadzony tak, że prowadzi do rozbieżnych wniosków, właściwą rzeczą jest surowa ocena początkowych przesłanek.

Kocham matematykę, gdyż jest dziedziną fascynującą i dającą ogromne możliwości. Cieszcie się nią w takim stopniu, w jakim potraficie. Ale, jak pisała Ayn Rand, sprawdzajcie przesłanki!