Pojęcie *równowagi Nasha* w teorii gier

Autor: **Robert P. Murphy**

Źródło: mises.ca

Tłumaczenie: **Igor Wysocki**

Wraz z tragiczną śmiercią (w wypadku taksówki) Johna Nasha i jego żony, zaczęto analizować wkład Nasha w budowanie świadomości społecznej. Autorem najlepszej analizy, jaką do tej pory widziałem, jest John Cassidy. Mimo to nawet jego rozważania nie wyjaśniają dostatecznie jasno, co oznacza słynne pojęcie równowagi Nasha. W tym artykule podam kilka na tyle prostych przykładów, że każdy laik będzie w stanie zrozumieć, co Nash osiągnął w swojej 27-stronicowej dysertacji doktorskiej (polecam uwadze także jego bibliografię na ostatniej stronie).

Byłem świadkiem, jak wielu komentatorów informowało swych czytelników, że John Nash rozwinął teorię gier niekooperacyjnych — w odróżnieniu (rzekomo) od prac Johna von Neumanna i Oskara Morgensterna na temat gier kooperacyjnych. Ujmowanie rzeczy w ten sposób może być jednak nieco mylące. Oczywiście pozostaje prawdą to, że John von Neumann i Morgenstern (dalej vNM) zrealizowali wiele badań na temat gier kooperacyjnych (dotyczących koalicji graczy, których członkowie mogą wykonywać „wspólne” ruchy). Z drugiej strony vNM napisali pionierską pracę na temat gier niekooperacyjnych, czyli takich, w których nie ma koalicji i gdzie każdy sam wybiera swoją własną strategię służącą maksymalizacji jego własnej wypłaty. Niestety vNM studiowali jedynie szczególny przykład dwuosobowych gier o sumie zerowej (gra o sumie zerowej to taka gra, w której zysk jednego gracza jest równy stracie drugiego). Ta kategoria gier tak naprawdę pokrywa większość z tego, co ludziom przychodzi na myśl, gdy słyszą słowo „gra” – włączając w to szachy, warcaby i gry karciane (o ile grają w nie dwie osoby).

Głównym rezultatem prac vNM było tak zwane *twierdzenie o minimaksie*. O szczegółach można poczytać tu, ale całość można pojąć całkiem intuicyjnie. W skończonej dwuosobowej grze o sumie zerowej istnieje taka wartość W, że pierwszy gracz może zagwarantować sobie wypłatę równą co najmniej W, zaś drugi może ograniczyć swoje straty do W. Nazwa twierdzenia pochodzi stąd, że każdy zawodnik rozumuje następująco: „Przy moim konkretnym zachowaniu, jak odpowie drugi gracz w celu maksymalizacji swojej wypłaty? Następnie, obliczywszy najlepszą odpowiedź mojego przeciwnika na każdą moją możliwą strategię, chcę wybrać takie działanie, które jego wypłatę zminimalizuje”. Jako że mamy do czynienia z grą o sumie zerowej, każdy gracz osiąga najkorzystniejszy dla siebie rezultat poprzez minimalizowanie wypłaty oponenta.

Było to bardzo eleganckie rozumowanie. Chociaż mnóstwo gier — szczególnie te, które mamy na myśli, używając terminu „gra” — należy do kategorii gier dwuosobowych o sumie zerowej, to istnieje wiele strategicznych interakcji niepodpadających pod tę kategorię. I właśnie w tym momencie na scenę wkracza John Nash. Wymyślił on bowiem rozwiązanie dla całej klasy gier niekooperacyjnych, czyli tych z *n* liczbą graczy o sumie ujemnej, zerowej lub dodatniej. Potem wykazał szerokie spektrum warunków, w jakich wystąpiłaby jego równowaga (innymi słowy: osiągnięcie Nasha nie byłoby ani tak uderzające, ani tak użyteczne, gdyby zdefiniował on pojęcie równowagi dla tych gier, a jednocześnie owo pojęcie nie stosowałoby się do pewnych szczególnych *n-osobowych* gier o sumie dodatniej).

Dla każdej gry analizowanej w ramach tej koncepcji należy określić zbiór graczy, zbiór *czystych strategii* dla każdego z nich oraz funkcję wypłat, której argumentami są wszystkie kombinacje strategii składające się na profil graczy, a jej wartościami wypłaty przyporządkowane każdemu uczestnikowi. (Pewną matematyczną subtelność stanowi tu fakt, że gracze mogą wybierać *strategie mieszane*, co oznacza, że przypisują pewne prawdopodobieństwo swoim czystym strategiom. Technicznie rzecz biorąc, funkcja wypłat dla całej gry to przyporządkowanie każdej możliwej kombinacji strategii mieszanych każdego z graczy zbiorowi ich wypłat). Jako że zdążyłem przedstawić już siatkę pojęciową, pozwolę sobie zilustrować naszą teorię przykładami prostych gier.

Jedną z popularnych gier jest tak zwana Walka Płci. Rzecz polega na tym, że mąż i żona mogą pójść do kina na film, który preferuje mąż (powiedzmy, że jest to film akcji) albo który preferuje żona (powiedzmy, że jest to romantyczna komedia). Haczyk polega na tym, że każda osoba w tym scenariuszu wolałaby raczej pójść do kina z partnerem niż sama i właśnie ten motyw sprawia, że wybór filmu przez każdą ze stron w tej grze jest taki interesujący. Możemy teraz przystąpić do przedstawienia powyższej gry, używając aparatu pojęciowego teorii gier:

Zbiór graczy={Mąż, Żona}

Zbiór czystych strategii Męża={Film Akcji, Romantyczna Komedia}

Zbiór czystych strategii Żony={Film Akcji, Romantyczna Komedia}

Zamiast formalnie definiować funkcję wypłat, łatwiej jest skonstruować macierz wypłat graczy dla czterech możliwych kombinacji ich czystych strategii. Ilustrację stanowi poniższa macierz (pierwszy element pary uporządkowanej w każdej komórce reprezentuje wypłatę Męża, a drugi Żony).

		STRATEGIA ŻONY	
		FILM AKCJI	KOMEDIA ROM.
STRATEGIA MĘŻA	FILM AKCJI	(3,2)	(1,1)
	KOMEDIA ROM.	(0,0)	(2,3)

Poczyńmy pewne obserwacje na temat powyższej gry. Przede wszystkim nie jest to gra o sumie zerowej, czyli *twierdzenie o minimaksie* nie ma zastosowania w tym przypadku. Innymi słowy, Mąż nie ma na celu jak najdotkliwszego skrzywdzenia drugiego gracza.

Mimo to powyższa sytuacja ma naturę strategiczną w tym sensie, że wypłata każdego gracza zależy nie tylko od jego strategii, ale też od zachowania drugiego uczestnika. Ten właśnie fakt stanowi różnicę miedzy teorią gier a bardziej konwencjonalnymi układami w teorii ekonomii. Na przykład w podręcznikach głównego nurtu do mikroekonomii konsument ma „dany" budżet i przyjmuje ceny rynkowe jako „dane", a następnie maksymalizuje użyteczność, dostosowując się do „danych" ograniczeń. Konsument nie musi „wchodzić w umysł" producenta, ani troszczyć się o to, czy zmieni on cenę/wolumen produkcji na podstawie decyzji konsumenta o zakupie.

Powróćmy jednak do naszej przykładowej gry, czyli do Walki Płci. Pomimo tego, że jest to gra o sumie dodatniej, zawiera ona w sobie element konfliktu, ponieważ Mąż wolałby, żeby oboje zdecydowali się na film akcji. Ten scenariusz skutkowałby najlepszym możliwym rezultatem dla Męża (wypłata w wysokości 3) i wypłatą w wysokości 2 dla Żony. Z kolei Żona wolałaby, aby oboje udali się na komedię romantyczną, ponieważ ten wynik dałby jej wypłatę w wysokości 3 (a 3>2). Ale powtórzmy raz jeszcze, oboje wolą pójść na preferowany przez siebie film wspólnie niż samotnie (co ilustruje fakt, że 2>1). Oczywiście najgorszy możliwy wynik ma miejsce, gdy — z jakiejś zupełnie niewytłumaczalnej przyczyny — Mąż decyduje się w samotności obejrzeć komedię romantyczną, podczas gdy żona idzie samotnie na film akcji.

W tej grze, zakładając że gracze dysponują jedynie czystymi strategiami, mamy do czynienia z dwoma punktami równowagi Nasha. Innymi słowy: jeśli przyznamy (gwoli prostoty) Mężowi i Żonie możliwość wyboru jednej z dwóch dostępnych im czystych strategii, wtedy istnieją tylko dwie takie kombinacje, które konstytuują punkty równowagi Nasha. Mówiąc konkretniej: są to kombinacje (Film Akcji, Film Akcji) oraz (Komedia Romantyczna, Komedia Romantyczna).

Formalnie rzecz biorąc, *równowaga Nasha jest definiowana* jako taka kombinacja strategii (również mieszanych), gdzie każda z nich stanowi najlepszą odpowiedź przy danych strategiach innych graczy.

Sprawdźmy zatem, czy wyznaczone przez nas dwie pary strategii rzeczywiście stanowią punkty równowagi Nasha. Najpierw zbadajmy kombinację (Film Akcji, Film Akcji). Jeśli Mąż wybierze strategię Film Akcji, wtedy możliwe wypłaty dla Żony to albo 2 (jeśli również wybierze strategię Film Akcji), albo 1 (jeśli zdecyduje się na komedię romantyczną). Ponieważ 2>1, Żona wolałaby wybrać strategię Film Akcji, jeśli wie, że Mąż wybiera strategię Film Akcji — czyli mamy w tym przypadku do czynienia z równowagą Nasha. Sprawdźmy teraz, jak to wygląda z perspektywy Męża: jeśli wie on, że Żona decyduje się na film akcji, to jego możliwe wypłaty to albo 3, albo 0. Ponieważ 3>0, Mąż poprawiłby swój rezultat, gdyby zamiast strategii Komedia Romantyczna wybrał Film Akcji — o ile tylko Żona wybiera Film Akcji. Rozważanie sporu z punktu widzenia Męża, udowodniło więc, że kombinacja (Film Akcji, Film Akcji) stanowi punkt równowagi Nasha.

Spójrzmy jeszcze na chwilę na drugą stronę, czyli kombinację (Komedia Romantyczna, Komedia Romantyczna). Jeśli Mąż wybiera Komedię Romantyczną, to najlepszą odpowiedzią Żony jest Komedia Romantyczna, ponieważ 3>0. Zatem znów reakcja Żony stanowi najlepszą odpowiedź na strategię Męża. Sprawdźmy teraz, czy owa strategia Męża stanowi najlepszą odpowiedź na wybór Komedii Romantycznej przez Żonę. Jeśli Żona wybiera Komedię Romantyczną, wtedy najlepszą odpowiedzią Męża jest Komedia Romantyczna, ponieważ 2>1. Skoro sprawdziliśmy, że w tej kombinacji strategia każdego z graczy stanowi najlepszą odpowiedź na strategię drugiego gracza, to cała kombinacja stanowi punkt równowagi Nasha.

Chciałbym odwołać się do jeszcze jednego przykładu, żeby zilustrować siłę oddziaływania odkrycia Nasha. Istnieją gry, dla których nie istnieje równowaga

Nasha w czystych strategiach. Dla przykładu rozważmy następującą klasyczną grę:

		Strategia Mary		
		KAMIEŃ	PAPIER	NOŻYCE
Strategia Joe	KAMIEŃ	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
	PAPIER	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
	NOŻYCE	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

Zauważmy, że w tej grze nie istnieje równowaga Nasha w czystych strategiach. Jeśli Joe wybierze Kamień, to najlepszą odpowiedzią Mary jest Papier. Ale jeśli Mary wybierze Papier, wtedy Joe nie chciałby wybrać strategii Kamień (w takim wypadku poprawiłby swój rezultat, gdyby wybrał Nożyce). I tak dalej dla dziewięciu możliwych kombinacji czystych strategii.

Chociaż nie istnieje dla tej gry punkt równowagi Nasha w czystych strategiach, istnieje on w strategiach mieszanych. Innymi słowy: jeśli pozwolimy graczom przypisać prawdopodobieństwa do każdej z dostępnych im strategii, wtedy uda się odnaleźć równowagę Nasha w tak poszerzonym profilu. Przejdźmy do rzeczy: jeśli poszczególni gracze wybierają każdą ze swoich czystych strategii średnio w co trzecim ruchu, wtedy osiągamy równowagę Nasha dla kombinacji tych strategii mieszanych.

Sprawdźmy przewidywany przez nas rezultat. Jeśli dany jest fakt, że Joe z równym prawdopodobieństwem miesza strategie Kamień, Papier, Nożyce, wybór czystej strategii pozostaje obojętny z punktu widzenia Mary. Niezależnie od tego, którą czystą strategię Mary wybierze, oczekiwana wartość jej wypłaty wynosi 0. Na przykład: jeśli Mary wybiera Papier ze 100-procentowym prawdopodobieństwem, a Joe co trzeci krok wybiera Kamień, to wtedy Mary otrzymuje 1. Joe wybiera też co trzeci krok Papier i w tych przypadkach Mary otrzymuje 0. W końcu Joe co trzeci krok wybiera strategię Nożyce, a wtedy Mary otrzymuje -1. Zatem jej oczekiwana wypłata przed ujrzeniem faktycznych wyborów Joe wynosi $(1/3 \times 1) + (1/3 \times 0) + (1/3 \times [-1]) = (1/3) - (1/3) = 0$. Moglibyśmy przeprowadzić podobne wyliczenie dla Mary wybierającej Kamień i Nożyce przeciwko mieszanej strategii Joe, gdzie każda ze strategii wybierana jest przez niego z prawdopodobieństwem 1/3.

Zatem skoro Mary otrzymuje oczekiwaną wypłatę w wysokości 0, wybierając którąkolwiek czystą strategię przeciwko mieszanej strategii Joe'go (gdzie każda jest wybierana z prawdopodobieństwem 1/3), każda z czystych strategii Mary stanowi najlepszą odpowiedź na mieszaną strategię jej przeciwnika. Ponadto którakolwiek kombinacja liniowa tych strategii również stanowi najlepszą odpowiedź. Przytoczmy pewien szczególny przykład. Mary byłaby całkowicie usatysfakcjonowana, gdyby wybrała strategię mieszaną (wybierając każdą z czystych strategii z prawdopodobieństwem 1/3) przeciwko zakładanej strategii Joe'go. Taka strategia Mary również zapewniłaby jej oczekiwaną wypłatę w wysokości 0, ponieważ Mary nie jest w stanie poprawić tego rezultatu. (Teraz pozwolę sobie pominąć matematyczny aparat dowodzący, że mieszanie czystych strategii, które dają tę samą oczekiwaną wypłatę, przynosi tę samą oczekiwaną wypłatę). Mam tylko nadzieję, że czytelnik intuicyjnie zauważa, że jeśli Mary otrzyma wypłatę 0, grając którąkolwiek ze swoich czystych strategii, to jeśli przypisze pewne prawdopodobieństwo do dwóch albo trzech strategii, również otrzyma oczekiwaną wypłatę w wysokości 0.

Znajdujemy się obecnie w połowie drogi prowadzącej do wykazania, że nasz zakładany profil strategii mieszanych rzeczywiście stanowi punkt równowagi Nasha. W szczególności pozytywnie zweryfikowaliśmy hipotezę, że *jeśli* Joe miesza swe czyste strategie z równym prawdopodobieństwem, *wtedy* Mary w odpowiedzi równie dobrze mogłaby mieszać swoje czyste strategie z równym prawdopodobieństwem. To, co zostało jeszcze do zrobienia, to przeprowadzenie analogicznego rozumowania z perspektywy Joe. Innymi słowy: należy sprawdzić, czy Joe równie chętnie mieszałby swoje strategie, gdyby w ten sposób postępowała Mary. Ale skoro to gra jest idealnie symetryczna, to mam nadzieję, że czytelnik zauważy, że żadne dowodzenie nie jest już potrzebne — byłoby to po prostu lustrzanym odbicie powyższych wyliczeń.

Żeby zatoczyć teraz pełne koło i uniknąć nieporozumień, powinienem dodać, że koncepcja von Neumanna i Morgensterna radzi sobie z grą Kamień, Papier, Nożyce, ponieważ jest to gra dwuosobowa o sumie zerowej. Wartość W dla tej gry jest zawsze równa 0. Jeśli Joe miesza swe czyste strategie z równym prawdopodobieństwem, wtedy jest w stanie zmniejszyć oczekiwaną wypłatę Mary. Oczekiwana wypłata Mary spada wtedy z poziomu najlepszej odpowiedzi do 0, a Joe może zmniejszyć swoje oczekiwane straty do 0. (Przyczyną, dla której wybrałem przykład dwuosobowej gry o sumie zerowej jest to, że chciałem, aby ilustracja pojęcia równowagi Nasha w strategiach mieszanych była jak najprostsza).

Skoro wiemy, co oznacza równowaga Nasha w strategiach mieszanych, możemy odnieść się do głównego osiągnięcia Nasha z jego 27-stronicowej dysertacji. Używając matematycznego *twierdzenia o punkcie stałym*, Nash wykazał ogólne warunki, przy których możemy udowodnić, że istnieje co najmniej jeden punkt równowagi Nasha dla danej gry. (Oczywiście Nash nie nazwał odkrytego przez siebie pojęcia równowagi mianem *równowagi Nasha*. W swej pracy użył on nazwy *punkt równowagi*. Nazwa *równowaga Nasha* przyszła później i nie była już dziełem autora).

I jeszcze jedna uwaga. Skoro już wiemy, czym Nash zajmował się w Princeton, jesteśmy w stanie zrozumieć, jak absurdalne są niektóre ze scen z filmu Rona Howarda. Filmowy Nash (odgrywany przez Russela Crowe'a) mówi swoim kolegom, aby przestali kierować się jedynie wąsko pojętym własnym interesem przy podrywaniu kobiet, a zamiast tego opracowali strategię, która pomogłaby maksymalizować interes grupy. Ta konstatacja jest zupełnie przeciwna analizie przeprowadzonej przez prawdziwego Nasha w jego dysertacji. Gdyby prawdziwy Nash miał przeanalizować strategiczną sytuację w filmowym barze, powiedziałby prawdopodobnie:

> *Gdyby wszyscy mężczyźni z grupy zgodzili się ignorować piękną blondynkę i zamiast tego skoncentrowali się na jej koleżankach o bardziej pospolitej urodzie, wszyscy byliby szczęśliwsi, niż gdyby każdy z nich miał się skupić na owej piękności. Ale taki rezultat nie stanowi równowagi Nasha, nie spodziewajmy się więc, że taki układ zadziała. Gdyby reszta z nas skupiła się na koleżankach pięknej blondynki, każdy z nas miałby bodziec, aby się wyłamać i podejść do niej. Takie są słabości racjonalnego egoistycznego zachowania.*

(Mam nadzieję, że czytelnicy wybaczą mi nieco seksistowskie zabarwienie poprzedniego paragrafu, ale to właśnie używając takiego tła, Ron Howard przekazuje odkrycie Nasha światu. Po prostu gram kartami, które zostały mi rozdane).

John Nash dostarczył ekonomistom potężnego narzędzia do analizowania strategicznych interakcji. Jeśli chcecie zobaczyć, jak ekonomiści podjęli jego elegancką teorię i zastosowali ją do układów, w których prowadzi ona do absurdów, zapoznajcie się z moimi artykułami: *The Games Economists Play* i *A Confused Mind*.